CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Soluzioni degli esercizi della prova scritta del 17 dicembre 2003

Studio di funzione:

1. Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} (x^2-1)e^x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ -\ln x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (h) punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Chiamiamo per comodità $f_1(x) = (x^2-1)e^x$ e $f_2(x) = -\ln x$. Osserviamo che conosciamo il grafico di f_2 (f_2 è l'opposto di $\ln x$, dunque il suo grafico è il simmetrico rispetto all'asse x del grafico di $\ln x$), dunque l'esercizio si riduce allo studio di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 1]$.

(a) $\mathrm{CE} = (-\infty, +\infty)$, $\mathrm{CE}' = [-\infty, +\infty]$.

(b) Poiché f_1 e f_2 sono funzioni continue e derivabili nei loro campi di esistenza, f è sicuramente continua e derivabile in $\mathrm{C} = \mathrm{D} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(c) Eventuali discontinuità vanno studiate in $\mathrm{CE} - \mathrm{C} = \{1\}$:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f_1(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2-1)e^x = 0$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f_2(x) = \lim_{x\to1^+} -\ln x = 0$$

Dunque

$$\lim_{x\to1} f(x) = 0 = f(1)$$

cioè f è continua in 1.

(d) I limiti vanno calcolati in $\mathrm{CE}' - \mathrm{C} = \{-\infty, 1, +\infty\}$. Il limite in 1 è già stato svolto, mentre quello in $+\infty$ è noto.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} x^2e^x - \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

(e) Visti i limiti calcolati al punto precedente, deduciamo che:
- non ci sono asintoti verticali;
- $y = 0$ è asintoto orizzontale verso $-\infty$;
- non ci sono asintoti obliqui (il logaritmo non ha asintoto obliquo verso $+\infty$).

(f) La monotonia è data dal segno della derivata prima (vedi figura 1).

$$f'(x) := \begin{cases} 2xe^x + (x^2-1)e^x & \text{se} \quad x < 1 \\ -1/x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} = \begin{cases} e^x(x^2+2x-1) & \text{se} \quad x < 1 \\ -1/x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

(g) I coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra in 1 sono dati rispettivamente dai limiti destro e sinistro di f' in 1:

$$m^- = \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} e^x(x^2+2x-1) = 2e$$
$$m^+ = \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} -1/x = -1$$

La tangente sinistra passa per il punto $(1, \lim_{x\to1^-} f(x)) = (1, 0)$, la tangente destra passa per il punto $(1, \lim_{x\to1^+} f(x)) = (1, 0)$. Otteniamo:

$$\text{tangente sinistra: } y = m^-(x-1) \Rightarrow y = 2e(x-1);$$
$$\text{tangente destra: } y = m^+(x-1) \Rightarrow y = -x+1.$$

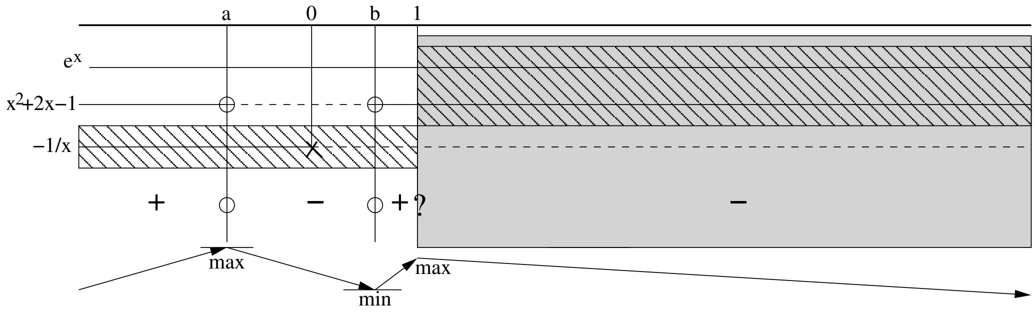

Figura 1: Segno di f'. Abbiamo posto $a = -1 - \sqrt{2}$, $b = -1 + \sqrt{2}$. Il tratteggio indica parti che non ci interessano, il grigio indica la parte che si poteva evitare perché già nota. Il punto interrogativo indica che ancora non sappiamo se esiste $f'(1)$.

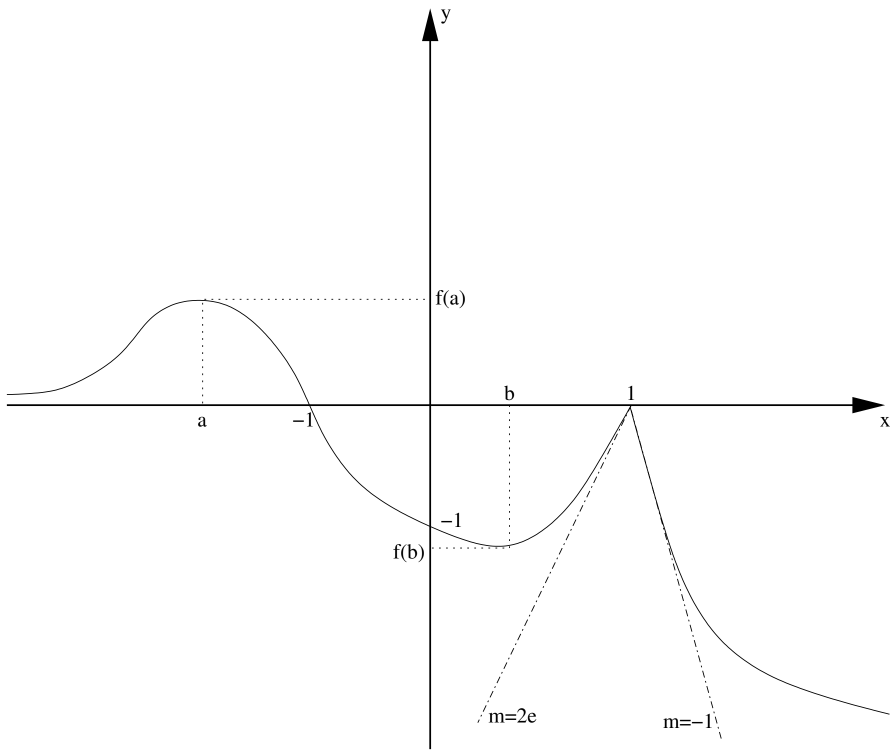

Figura 2: Grafico di f. Abbiamo posto $a = -1 - \sqrt{2}$, $b = -1 + \sqrt{2}$. Notare che da 1 in poi il grafico è il simmetrico rispetto all'asse x del grafico di $\ln x$.

(h) Eventuali punti di non derivabilità vanno cercati in CE − D = $\{1\}$. Poiché le tangenti destra e sinistra di f in 1 non coincidono, f non è derivabile in 1.

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di f (figura 2). Notare che il grafico è ottenuto per incollamento dei grafici di f_1 e f_2, e abbiamo sfruttato dove possibile la conoscenza del grafico di f_2.

Per disegnare il grafico di f in figura 2 abbiamo usato le seguenti considerazioni:

- intersezioni con asse $x = \{(-1, 0), (1, 0)\}$;
- intersezione con asse $y = \{(0, -1)\}$;
- $a < -1 < 0 < b < 1$;
- $f(a) > 0 > -1 > f(b)$.

Infine, osserviamo che se non si calcola la derivata seconda non si ha alcuna garanzia che la concavità a sinistra di 1 sia come in figura 2. Lo studio (facoltativo) della derivata seconda dà due flessi di ascisse $-2 \pm \sqrt{3}$.

2. Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} (x-1)e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^3 - 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 0$; (h) punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Chiamiamo per comodità $f_1(x) = (x-1)e^x$ e $f_2(x) = x^3 - 1$. Osserviamo che conosciamo il grafico di f_2 (è quello di x^3 traslato verticalmente di -1), dunque l'esercizio si riduce allo studio di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 0]$.

(a) $\mathrm{CE} = (-\infty, +\infty)$, $\mathrm{CE}' = [-\infty, +\infty]$.

(b) Poiché f_1 e f_2 sono funzioni continue e derivabili nei loro campi di esistenza, f è sicuramente continua e derivabile in $\mathrm{C} = \mathrm{D} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(c) Eventuali discontinuità vanno studiate in $\mathrm{CE} - \mathrm{C} = \{0\}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1)e^x = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 - 1 = -1$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

cioè f è continua in 0.

(d) I limiti vanno calcolati in $\mathrm{CE}' - \mathrm{C} = \{-\infty, 0, +\infty\}$. Il limite in 0 è già stato svolto, mentre quello in $+\infty$ è noto.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f_1(x) = \lim_{x\to -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to -\infty} xe^x - \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

(e) Visti i limiti calcolati al punto precedente, deduciamo che:
- non ci sono asintoti verticali;
- $y = 0$ è asintoto orizzontale verso $-\infty$;
- non ci sono asintoti obliqui (x^3 non ha asintoto obliquo verso $+\infty$).

(f) La monotonia è data dal segno della derivata prima (vedi figura 3).

$$f'(x) := \begin{cases} e^x + (x-1)e^x & \text{se} \quad x < 0 \\ 3x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} xe^x & \text{se} \quad x < 0 \\ 3x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

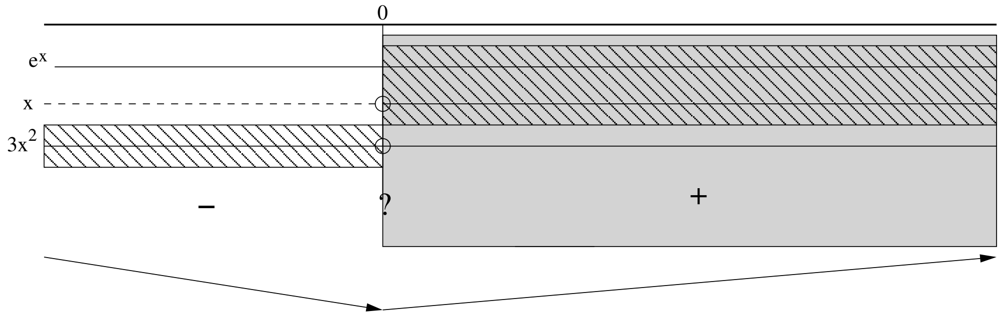

Figura 3: Segno di f'. Il tratteggio indica parti che non ci interessano, il grigio indica la parte che si poteva evitare perché già nota. Il punto interrogativo indica che ancora non sappiamo se esiste $f'(0)$.

(g) I coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra in 0 sono dati rispettivamente dai limiti destro e sinistro di f' in 0:

$$m^- = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^x = 0$$
$$m^+ = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 0$$

La tangente sinistra passa per il punto $(0, \lim_{x\to 0^-} f(x)) = (0, -1)$, la tangente destra passa per il punto $(0, \lim_{x\to 0^+} f(x)) = (0, -1)$. Otteniamo:

$$\text{tangente sinistra: } y + 1 = m^- x \Rightarrow y = -1;$$
$$\text{tangente destra: } y + 1 = m^+ x \Rightarrow y = -1.$$

(h) Eventuali punti di non derivabilità vanno cercati in CE − D = $\{0\}$. Poiché le tangenti destra e sinistra di f in 0 coincidono, f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di f (figura 4). Notare che il grafico è ottenuto per incollamento dei grafici di f_1 e f_2, e abbiamo sfruttato dove possibile la conoscenza del grafico di f_2.

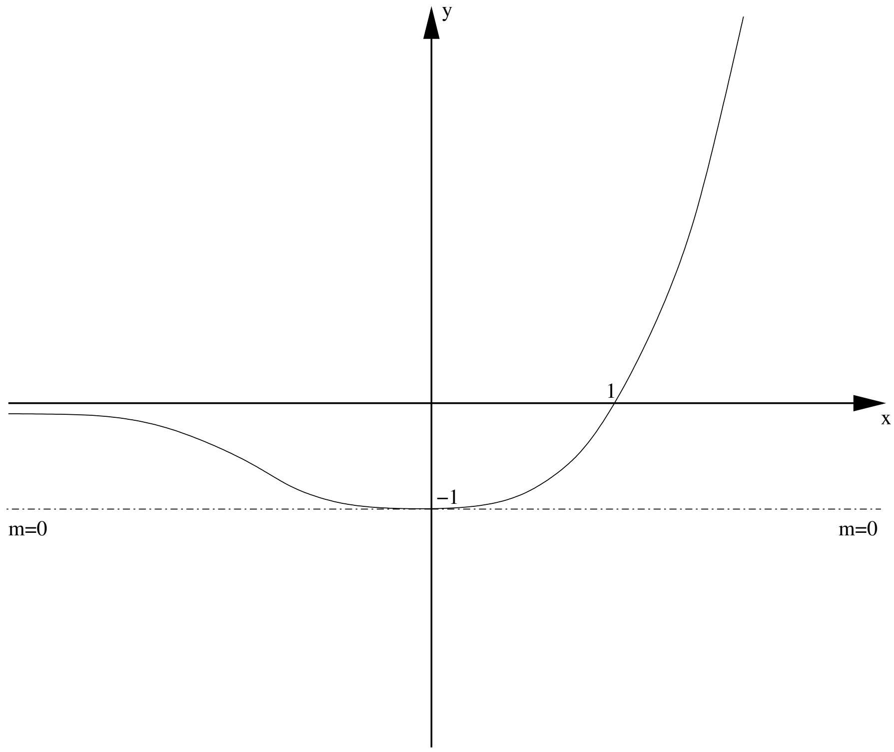

Figura 4: Grafico di f. Notare che da 0 in poi il grafico è quello di x^3 traslato verticalmente di -1.

Infine, osserviamo che se non si calcola la derivata seconda non si ha alcuna garanzia che la concavità a sinistra di 0 sia come in figura 4. Lo studio (facoltativo) della derivata seconda dà un unico flesso di ascissa -1.

Studio di grafico di funzione:

1. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 5, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti e valori critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 3; (l) punti di non derivabilità.

   Svolgimento:

   (a) CE $= (-5,-2) \cup (-1,+\infty)$, CE$' = [-5,-2] \cup [-1,+\infty]$.

   (b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{-3, 2, 5\}$. Notare che il valore -5 è escluso.

   (c) Le intersezioni con l'asse x sono i punti $(-3,0), (2,0), (5,0)$, e l'intersezione con l'asse y è il punto $(0,2)$.

   (d) Il segno è dato dalla figura 6.

   (e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione non ha alcun salto nel CE, e dunque non ci sono discontinuità.

   (f) Essendo la funzione continua nel suo campo di esistenza, i limiti non banali sono quelli in CE$'$ − CE $= \{-5, -2, -1, +\infty\}$. Passeggiando sul grafico e guardando l'asse y durante la passeggiata, otteniamo:

$$\lim_{x\to -5^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

   (g) $x = -2$ è asintoto verticale da destra verso $-\infty$, $x = -1$ è asintoto verticale da sinistra verso $+\infty$.

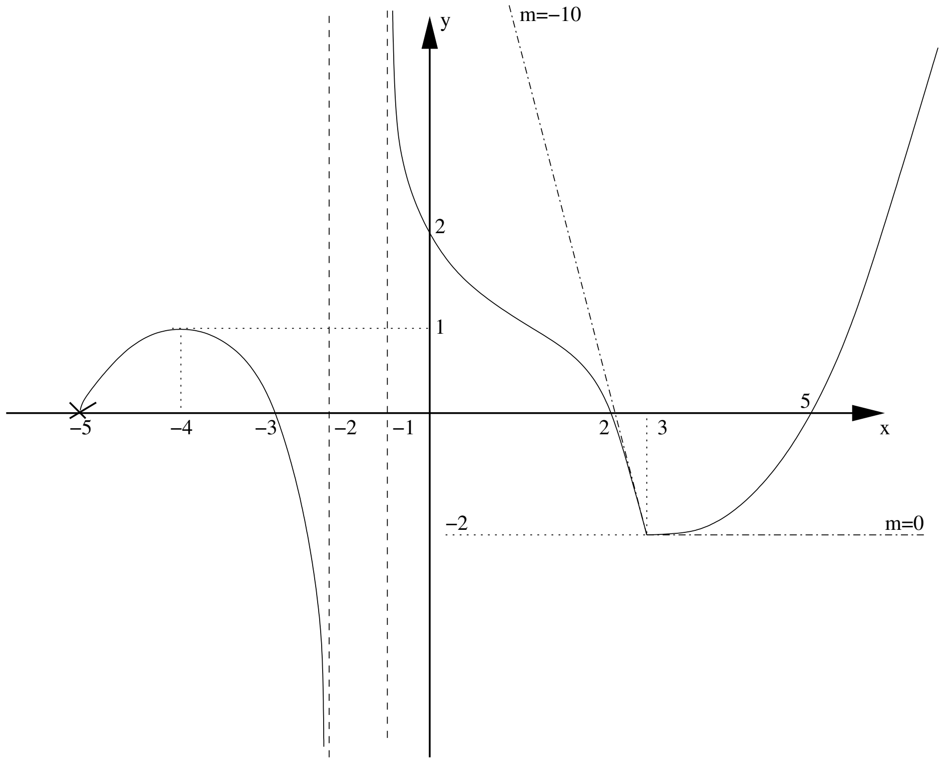

Figura 5: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

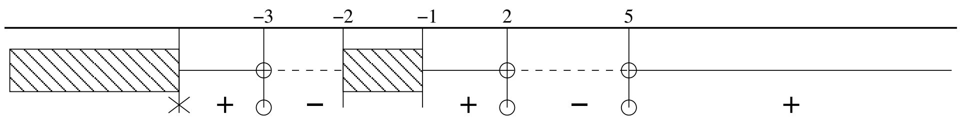

Figura 6: Segno della funzione data dal grafico in figura 5.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero). L'unico punto siffatto in figura 5 è $(-4, 1)$. Si usa la terminologia "punto critico" anche per l'ascissa -4 di questo punto, mentre il valore critico è la sua ordinata 1.

(i) La monotonia è data dalla figura 7.

(j) Essendo la funzione illimitata sia superiormente che inferiormente (vedi i limiti al punto f), non ci sono estremi globali. Gli estremi locali sono $(-4, 1)$ (massimo locale) e $(3, -2)$ (minimo locale).

(k) La tangente sinistra è $y + 2 = -10(x - 3)$, la tangente destra è $y + 2 = 0$.

(l) Nel punto $(3, -2)$ ci sono due tangenti differenti, da destra e da sinistra. Analiticamente, questo corrisponde alla non derivabilità in 3.

2. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 8, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti e valori critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 3; (l) punti di non derivabilità.

Svolgimento:

(a) $\text{CE} = (-\infty, -2) \cup (-1, 5)$, $\text{CE}' = [-\infty, -2] \cup [-1, 5]$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{-3, 2\}$. Notare che il valore 5 è escluso.

(c) Le intersezioni con l'asse x sono i punti $(-3, 0), (2, 0)$, e l'intersezione con l'asse y è il punto $(0, 3)$.

(d) Il segno è dato dalla figura 9.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione non ha alcun salto nel CE, e dunque non ci sono discontinuità.

(f) Essendo la funzione continua nel suo campo di esistenza, i limiti non banali sono quelli in $\text{CE}' - \text{CE} =$

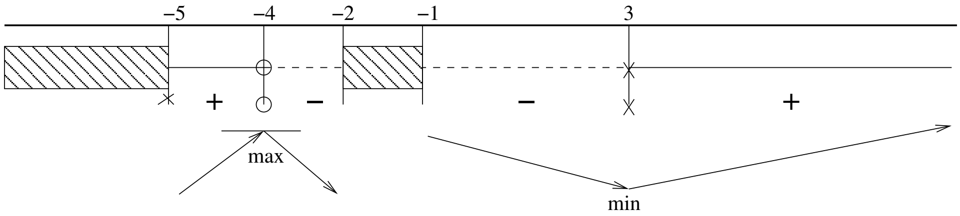

Figura 7: Monotonia della funzione data dal grafico in figura 5.

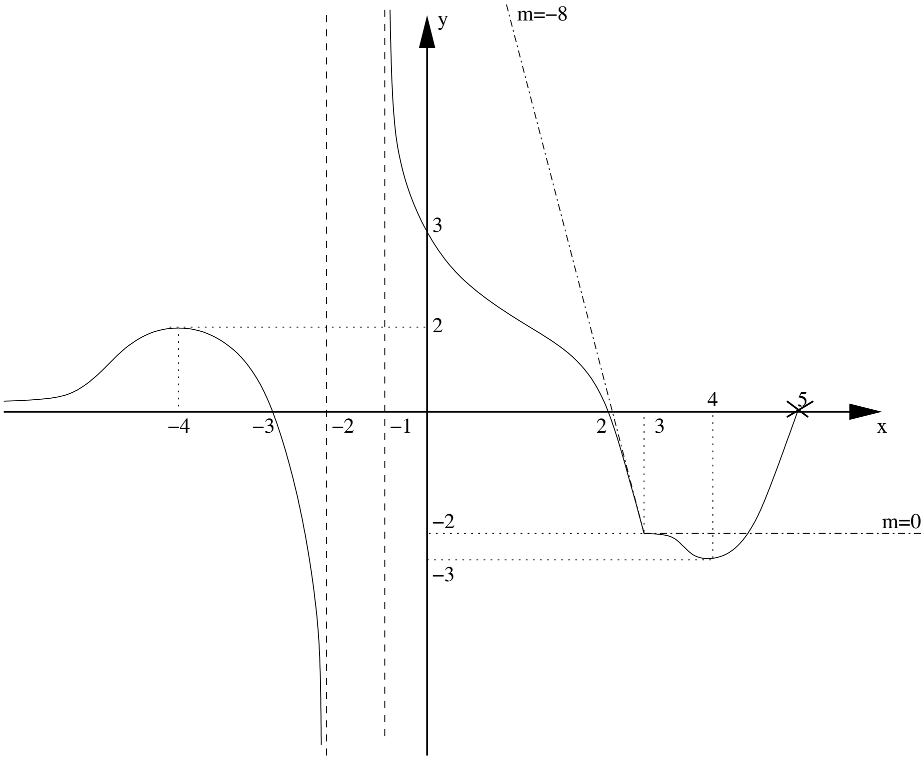

Figura 8: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

$\{-\infty, -2, -1, 5\}$. Passeggiando sul grafico e guardando l'asse y durante la passeggiata, otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to5^-} f(x) = 0$$

(g) $y = 0$ è asintoto orizzontale verso $-\infty$, $x = -2$ è asintoto verticale da destra verso $-\infty$, $x = -1$ è asintoto verticale da sinistra verso $+\infty$.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero). Gli unici punti siffatti in figura 8 sono $(-4, 2)$ e $(4, -3)$. Si usa la terminologia "punto critico" anche per le ascisse -4 e 4 di questi punti, mentre i valori critici sono le loro ordinate 2 e -3.

(i) La monotonia è data dalla figura 10.

(j) Essendo la funzione illimitata sia superiormente che inferiormente (vedi i limiti al punto f), non ci sono estremi globali. Gli estremi locali sono $(-4, 2)$ (massimo locale) e $(4, -3)$ (minimo locale).

(k) La tangente sinistra è $y + 2 = -8(x - 3)$, la tangente destra è $y + 2 = 0$.

(l) Nel punto $(3, -2)$ ci sono due tangenti differenti, da destra e da sinistra. Analiticamente, questo corrisponde alla non derivabilità in 3.

Massimi e minimi:

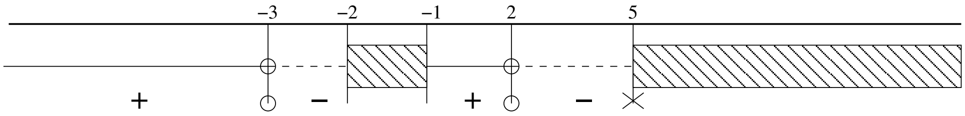

Figura 9: Segno della funzione data dal grafico in figura 8.

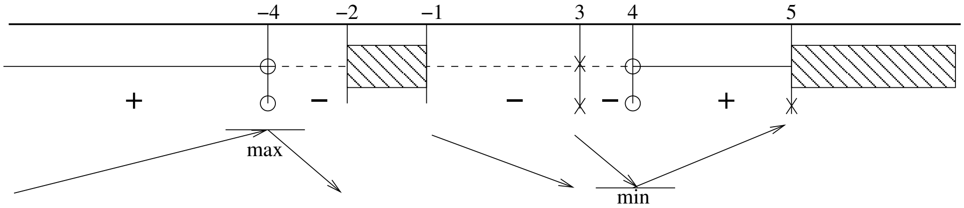

Figura 10: Monotonia della funzione data dal grafico in figura 8.

1. Determinare i punti e i valori di minimo e massimo (locali e globali) sull'intervallo $(0, 1]$ della seguente funzione:

$$f(x) := x - (x + 1)^2$$

Svolgimento:
La funzione è polinomiale di grado 2, dunque il suo grafico sull'intervallo $(0, 1]$ è un tratto di parabola. Svolgendo il quadrato otteniamo $f(x) := -x^2 - x - 1$, e la sua derivata $f'(x) = -2x - 1$ si annulla nel punto di ascissa $-1/2$. Il vertice della parabola è $(-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, -3/4)$. Osservando che il primo coefficiente è negativo, disegniamo il tratto di parabola in figura 11. Il grafico di f mostra che esiste un minimo, globale e

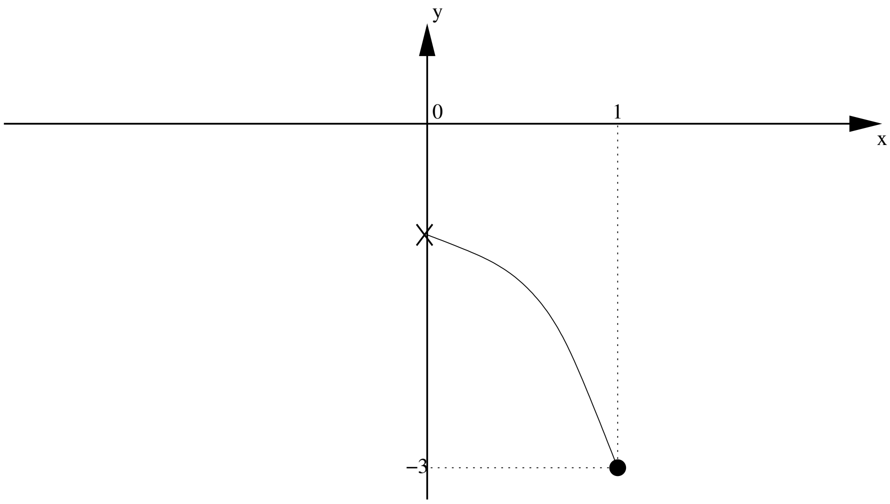

Figura 11: Grafico di $f(x) = -x^2 - x - 1$. Il punto di ascissa 0 è escluso (crocetta), il punto di ascissa 1 è incluso (cerchietto pieno).

locale, con ascissa 1 e ordinata (valore di minimo) $f(1) = -3$. Notare che il punto di ascissa 0 non è un massimo, in quanto 0 è escluso dall'intervallo di definizione di f.

2. Determinare i punti e i valori di minimo e massimo (locali e globali) sull'intervallo $[0, 1)$ della seguente funzione:

$$f(x) := -x + (x + 1)^2$$

Svolgimento:
La funzione è polinomiale di grado 2, dunque il suo grafico sull'intervallo $[0, 1)$ è un tratto di parabola. Svolgendo il quadrato otteniamo $f(x) := x^2 + x + 1$, e la sua derivata $f'(x) = 2x + 1$ si annulla nel punto di ascissa $-1/2$. Il vertice della parabola è $(-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, 3/4)$. Osservando che il primo coefficiente è positivo, disegniamo il tratto di parabola in figura 12. Il grafico di f mostra che esiste un minimo, globale e locale, con ascissa 0 e ordinata (valore di minimo) $f(0) = 1$. Notare che il punto di ascissa 1 non è un massimo, in quanto 1 è escluso dall'intervallo di definizione di f.

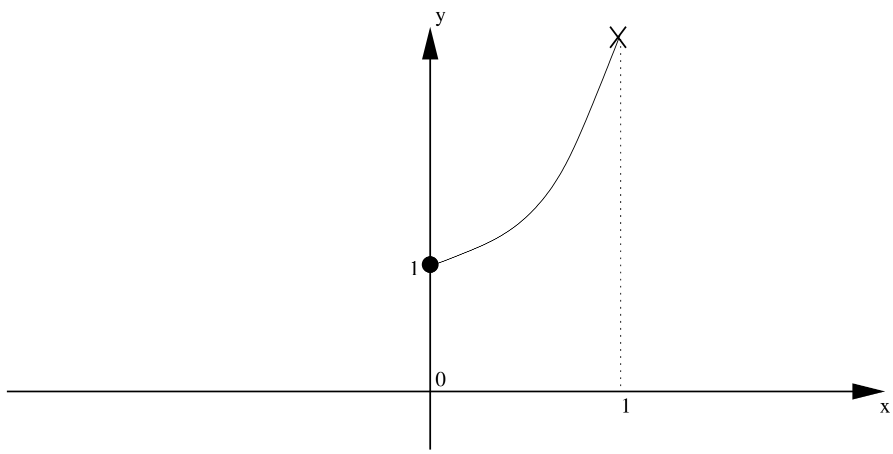

Figura 12: Grafico di $f(x) = x^2 + x + 1$. Il punto di ascissa 1 è escluso (crocetta), il punto di ascissa 0 è incluso (cerchietto pieno).

Zeri:

1. Stabilire se $f(x) := \ln x + \ln(x+1) + x$ ammette degli zeri su $(0, +\infty)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

   Svolgimento:

   Studio sommario di f.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = 1/x + 1/(x+1) + 1 \qquad \text{sempre positivo in } (0, +\infty)$$

   Il grafico di f in figura 13 ci dice che esiste un unico zero x_0 per f. Infine, poiché $f(1) = \ln 2 + 1 > 0$, si ha

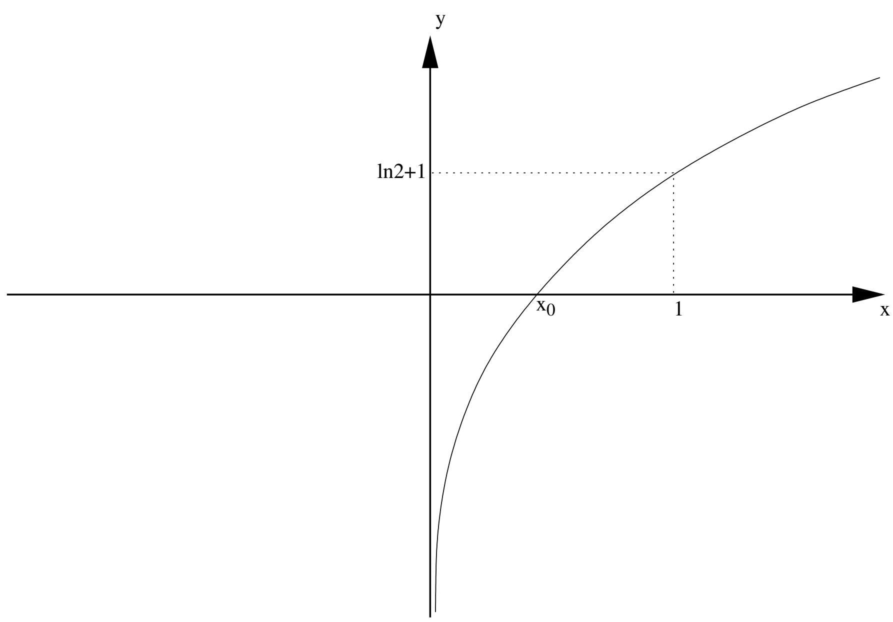

Figura 13: Grafico sommario di $f(x) = \ln x + \ln(x+1) + x$.

   $x_0 \in (0, 1)$.

2. Stabilire se $f(x) := e^x + \ln x + x$ ammette degli zeri su $(0, +\infty)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

   Svolgimento:

Studio sommario di f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = e^x + 1/x + 1 \qquad \text{sempre positivo in } (0, +\infty)$$

Il grafico di f in figura 14 ci dice che esiste un unico zero x_0 per f. Infine, poiché $f(1) = e + 1 > 0$, si ha

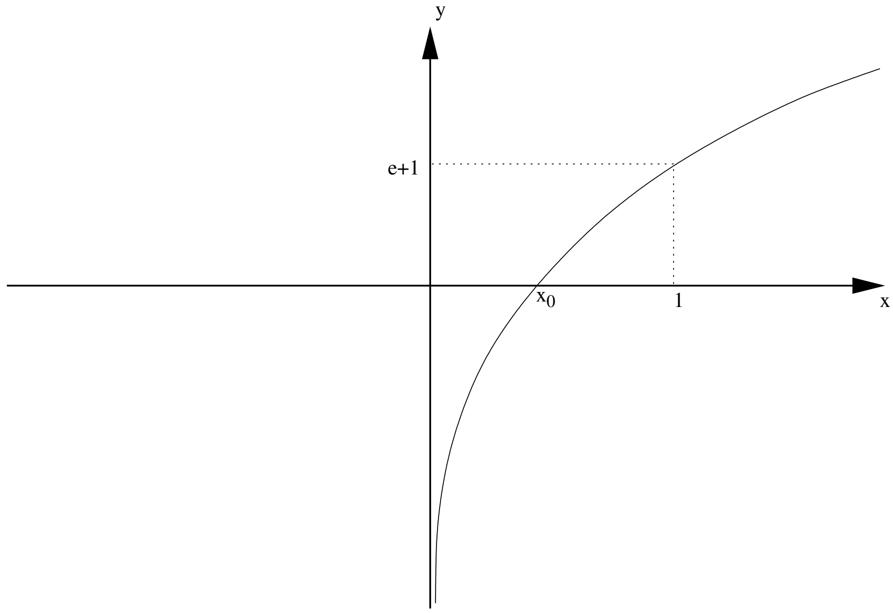

Figura 14: Grafico sommario di $f(x) = e^x + \ln x + x$.

$x_0 \in (0, 1)$.

Punti fissi:

1. Stabilire se la curva $f(x) := x^3 - x^2 - 1$ e la retta $y = x$ si intersecano. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := x^3 - x^2 - 1$.

   Svolgimento:

   Il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, e si risolve facendo uno studio sommario di F, dopo aver osservato che ± 1 non annullano F, e dunque il problema non è risolubile per via elementare. Il campo di esistenza di F è $\mathbb{R}$, dunque dobbiamo calcolare i limiti in $\{-\infty, +\infty\}$.

   $$\lim_{x\to -\infty} F(x) = -\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$$
   $$F'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

   Il segno di F' ci dà il grafico di F in figura 15. Dal grafico deduciamo che esiste un unico zero x_0 per F, e poiché $F(2) = 1 > 0$ si ha $x_0 \in (1, 2)$. I punti fissi di f sono le intersezioni con la retta $y = x$, quindi f ha un unico punto fisso $x_0 \in (1, 2)$.

2. Stabilire se la curva $f(x) := x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ e la retta $y = x$ si intersecano. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.

   Svolgimento:

   Il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$, e si risolve facendo uno studio sommario di F, dopo aver osservato che ± 1 non annullano F, e dunque il problema non è risolubile per via elementare. Il campo di esistenza di F è $\mathbb{R}$, dunque dobbiamo calcolare i limiti in $\{-\infty, +\infty\}$.

   $$\lim_{x\to -\infty} F(x) = -\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$$
   $$F'(x) = 3x^2 - 8x - 3$$

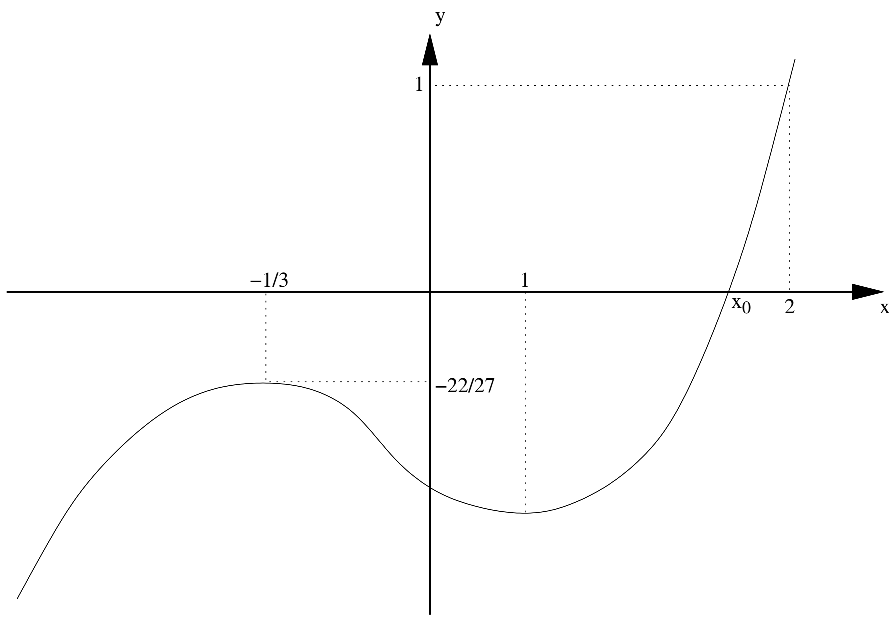

Figura 15: Grafico sommario di $F(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Il segno di F' ci dà il grafico di F in figura 16. Dal grafico deduciamo che esistono tre zeri x_0, x_1 e x_2 per F.

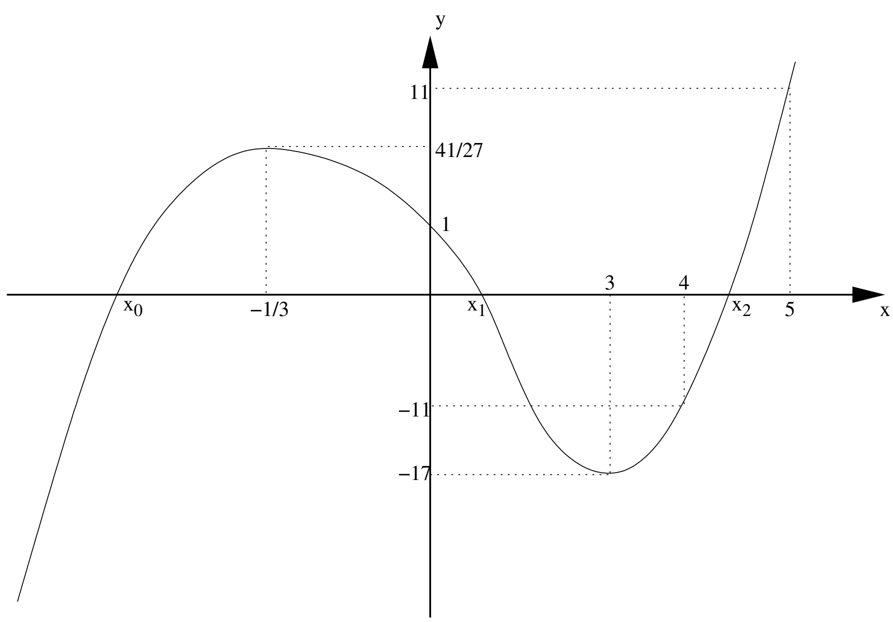

Figura 16: Grafico sommario di $F(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$.

Da $F(-1) = -1 < 0$ deduciamo $x_0 \in (-1, -1/3)$, da $F(0) = 1 > 0$ e $F(1) = -5 < 0$ deduciamo $x_1 \in (0, 1)$, e infine da $F(4) = -11 < 0$ e $F(5) = 11 > 0$ deduciamo $x_2 \in (4, 5)$. I punti fissi di f sono le intersezioni con la retta $y = x$, quindi f ha tre punti fissi $x_0 \in (-1, -1/3)$, $x_1 \in (0, 1)$ e $x_2 \in (4, 5)$.

Teorico:

1. Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{x^6 - x^5 + 1}$ ammette un punto critico nell'intervallo $[0, 1]$(giustificare la risposta).

   Svolgimento:

   Le funzioni x^6, x^5, 1 sono continue in $[0, 1]$. La funzione $\sqrt{x}$ è continua in $(0, +\infty)$, dunque basta verificare che $x^6 - x^5 + 1$ è positiva in $[0, 1]$ per concludere che $\sqrt{x^6 - x^5 + 1}$ è continua in $[0, 1]$. Un argomento analogo conclude che f è continua in $[0, 1]$.

   Evidentemente f è anche derivabile in $(0, 1)$, in quanto composizione di funzioni derivabili in $(0, 1)$.

   Infine, osserviamo che $f(0) = f(1)$. Per il teorema di Rolle, f ammette un punto critico.

2. Dire se $f(x) := 815e^{|x^{\ln(e^2)}+2x+1|^{1/2}-1}$ ammette massimo e minimo globale nell'intervallo $[0,1]$ (giustificare la risposta).

   Svolgimento:

   Due metodi.

   Primo metodo: f è composizione di funzioni continue in $[0,1]$, per cui f ècontinua in $[0,1]$. Il teorema di Weierstrass conclude.

   Secondo metodo: con le opportune semplificazioni risulta $f(x) = 815e^x$. Il grafico di f ci dà un minimo globale (in $(0,815)$) e un massimo globale (in $(1,815e)$).